



Jaouad Elkhayaty
1ERE BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Xpert · Mathematiques · 1ere Bac Sciences Experimentales

EA

Series d'exercices Logique Mathematique

Series d'exercices · corrige detaille

5 series - 54 exercices au total (Exercices 1 a 54)

Avec corrige detaille

5 series

54 exercices

Sommaire

1

Serie 1

Exercices 1 à 10

2

Serie 2

Exercices 11 à 20

3

Serie 3

Exercices 21 à 30

4

Serie 4

Exercices 31 à 40

5

Serie 5

Exercices 41 à 54

1 Exercice 1

Rappel :

- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1)

$$P : \forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0$$

Valeur : Faux (car $x = 0$ donne $0^2 = 0$)

2)

$$P : \exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$$

✓ Solution

$$\neg P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 \neq 0$$

Valeur : Vrai (car $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$)

3)

$$P : x \in [1; 2[$$

✓ Solution

$$\neg P : x \notin [1; 2[\text{ c'est-à-dire } x < 1 \text{ ou } x \geq 2$$

Valeur : dépend de x

4)

$$P : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists n \in \mathbb{N}, n^2 \notin \mathbb{N}$$

Valeur : Vrai (le carré d'un entier naturel est un entier naturel)

5)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists x \in \mathbb{R}; \cos x < -1 \text{ ou } \cos x > 1$$

Valeur : Vrai (propriété de la fonction cosinus)

6)

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n < m$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists n \in \mathbb{N}; (\forall m \in \mathbb{N}) : n \geq m$$

Valeur : Vrai (pour tout n , on peut prendre $m = n + 1$)

7)

$$P : (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ tel que } 2n + 1 \text{ est pair}$$

✓ Solution

$$\neg P : (\forall n \in \mathbb{N}), 2n + 1 \text{ est impair}$$

Valeur : Faux ($2n + 1$ est toujours impair)

8)

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists n \in \mathbb{N}; \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$$

Valeur : Faux (contre-exemple: $n = 2$)

9)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$$

✓ Solution

$$\neg P : \exists x \in \mathbb{R}; (\forall y \in \mathbb{R}) : y - x \leq 0$$

Valeur : Vrai (pour tout x , prendre $y = x + 1$)

10)

$$P : (\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$$

✓ Solution

$$\neg P : (\forall x \in \mathbb{R}), 2x + 4 \neq 0 \text{ ou il existe au moins deux solutions}$$

Valeur : Vrai (l'unique solution est $x = -2$)

2 Exercice 2

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1.

Le carré de tout réel est positif.

✓ Solution

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

2.

Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

✓ Solution

$$\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$$

3.

Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

✓ Solution

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m > n$$

4.

Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

✓ Solution

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{a}{b}$$

5.

Il existe un entier multiple de tous les autres.

✓ Solution

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \mid n$$

($m \mid n$ signifie m divise n)

6.

Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

✓ Solution

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y$$

3 Exercice 3

Propriété : Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $0 < x < 2$ et $0 < y < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$

✓ Solution

On a : $0 < x < 2$

D'après la propriété : $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

De même : $0 < y < 2 \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$

En additionnant : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

D'où : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$

Conclusion : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$

4 Exercice 4

Rappel : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

✓ Solution

On suppose : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$

En multipliant par $(1 + \sqrt{x})$: $1 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$

D'après l'identité remarquable : $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 1 - x$

Donc : $1 = 1 - x$

D'où : $x = 0$

Conclusion : $x = 0$

5 Exercice 5

Propriété : $a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$

1)

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

✓ Solution

On a : $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$

Puisque : $a^2 + b^2 = 0$

Alors : $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$

D'où : $a = 0$ et $b = 0$

Conclusion : $a = 0$ et $b = 0$

2)

$x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

✓ Solution

On a : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$

On réécrit : $x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

On factorise : $(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0$

Puisque : $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{y} - 1)^2 \geq 0$

Alors : $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$ et $(\sqrt{y} - 1)^2 = 0$

D'où : $\sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1$

Donc : $x = 1$ et $y = 1$

Conclusion : $x = y = 1$

6 Exercice 6

Propriété : $(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$$

✓ Solution

Étape 1 : On calcule $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Puisque : $a^2 + b^2 = 1$

On a : $(a + b)^2 = 1 + 2ab$

On sait que : $(a - b)^2 \geq 0$

Donc : $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

Alors : $2ab \leq a^2 + b^2$

Donc : $2ab \leq 1$ (puisque $a^2 + b^2 = 1$)

Donc : $2ab + 1 \leq 1 + 1 \iff 2ab + 1 \leq 2$

Alors : $(a + b)^2 \leq 2 \iff \sqrt{(a + b)^2} \leq \sqrt{2}$

D'où : $|a + b| \leq \sqrt{2}$

Conclusion : $|a + b| \leq \sqrt{2}$

7 Exercice 7

Définition : $a \in \mathbb{Q} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : a = \frac{p}{q}$

Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

✓ Solution

Soient : $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$

On a : $a = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

Et : $b = \frac{r}{s}$ avec $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$

Donc : $a + b = \frac{ps + rq}{qs}$

Puisque : $ps + rq \in \mathbb{Z}$ et $qs \in \mathbb{Z}^*$

D'où : $a + b \in \mathbb{Q}$

Conclusion : $a + b \in \mathbb{Q}$

8 Exercice 8

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$$

Montrer que :

$$|x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}|x-1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x-1|$$

✓ Solution

$$\text{On calcule : } f(x) - f(1) = \frac{x+2}{2x+1} - 1 = \frac{x+2-(2x+1)}{2x+1} = \frac{1-x}{2x+1}$$

$$\text{Donc : } |f(x) - f(1)| = \frac{|1-x|}{|2x+1|} = \frac{|x-1|}{|2x+1|}$$

$$\text{On a : } |x-1| < \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où : } -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{En multipliant par 2 : } 1 < 2x < 3$$

$$\text{En ajoutant 1 : } 2 < 2x+1 < 4$$

$$\text{Puisque : } 2x+1 > 0, \text{ on a } |2x+1| = 2x+1$$

$$\text{En passant à l'inverse : } \frac{1}{4} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}$$

$$\text{En multipliant par } |x-1| \text{ (positif) : } \frac{1}{4}|x-1| < \frac{|x-1|}{2x+1} < \frac{1}{2}|x-1|$$

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{4}|x-1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x-1|$$

9 Exercice 9

Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \in \mathbb{N}$

✓ Solution

⚠ Cette proposition est fausse !

$$\text{Contre-exemple : } n = 1$$

$$\text{On calcule : } \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Or : } \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$$

Conclusion : La proposition est fausse

10 Exercice 10

$$\forall x \in [-2; 2] : 2\sqrt{2} > \sqrt{4 - x^2}$$

✓ Solution

Soit : $x \in [-2; 2]$

On a : $-2 \leq x \leq 2$

En élevant au carré : $0 \leq x^2 \leq 4$

En multipliant par -1 : $-4 \leq -x^2 \leq 0$

En ajoutant 4 : $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$

En appliquant $\sqrt{}$ (croissante sur $[0, +\infty[$) : $0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$

D'autre part : $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$

Puisque : $2 = \sqrt{4}$ et $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, et $4 < 8$, alors $2 < 2\sqrt{2}$

Par conséquent : $\sqrt{4 - x^2} \leq 2 < 2\sqrt{2}$

Conclusion : $2\sqrt{2} > \sqrt{4 - x^2}$

11 Exercice 11

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq x^2 - x + 1$$

✓ Solution

On étudie le signe de : $x^2 - x + 1 - |x - 1|$

Cas 1 : $x \geq 1 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$

Étape 1 : $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2$

Étape 2 : $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$

Puisque : $(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$

Donc : $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ pour $x \geq 1$

Cas 2 : $x < 1 \Rightarrow |x - 1| = 1 - x$

Étape 3 : $x^2 - x + 1 - (1 - x) = x^2 - x + 1 - 1 + x = x^2$

Puisque : $x^2 \geq 0$

Donc : $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ pour $x < 1$

D'où : dans les deux cas, $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq x^2 - x + 1$

12 Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sqrt{2x+3} \leq x$$

✓ Solution

Domaine : $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

Condition nécessaire : $\sqrt{2x+3} \geq 0$ et $\sqrt{2x+3} \leq x \Rightarrow x \geq 0$

D'où : le domaine se réduit à $x \geq 0$

Étape 1 : Pour $x \geq 0$, les deux membres sont ≥ 0 , on élève au carré : $2x+3 \leq x^2$

Étape 2 : $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Étape 3 : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$, racines $x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3$ ou $x = -1$

Donc : $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

Étape 4 : $(x-3)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 3$

On combine avec $x \geq 0$: seule $x \geq 3$ convient

Conclusion : $S = [3; +\infty[$

13 Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x-1| + 2x - 3 \geq 0$$

✓ Solution

Cas 1 : $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1$

Étape 1 : $(x-1) + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$

On combine avec $x \geq 1$: $\frac{4}{3} > 1$, donc $x \geq \frac{4}{3}$ convient

Solution 1 : $S_1 = [\frac{4}{3}; +\infty[$

Cas 2 : $x < 1 \Rightarrow |x-1| = 1-x$

Étape 2 : $(1-x) + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

On combine avec $x < 1$: $x \geq 2$ et $x < 1$: impossible

Solution 2 : $S_2 = \emptyset$

D'où : $S = S_1 \cup S_2$

Conclusion : $S = [\frac{4}{3}; +\infty[$

14 Exercice 14

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

✓ Solution

Cas 1 : $x \geq 0$

On a : $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ (toujours) et $x \geq 0$

Donc : $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$ (somme d'un terme > 0 et d'un terme ≥ 0)

Cas 2 : $x < 0$, on pose $-x > 0$

On a : $x^2 + 1 > x^2 = (-x)^2$

La fonction $\sqrt{}$ étant croissante : $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{(-x)^2} = |-x| = -x$

D'où : $\sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

15 Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^2 - |x - 2| + 5 = 0$$

✓ Solution

Cas 1 : $x \geq 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$

Étape 1 : $x^2 - (x - 2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 + 5 = 0$

Étape 2 : $x^2 - x + 7 = 0$

Étape 3 : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(7) = 1 - 28 = -27 < 0$

Donc : pas de solution réelle dans ce cas

Cas 2 : $x < 2 \Rightarrow |x - 2| = 2 - x$

Étape 4 : $x^2 - (2 - x) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 + x + 5 = 0$

Étape 5 : $x^2 + x + 3 = 0$

Étape 6 : $\Delta = 1^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11 < 0$

Donc : pas de solution réelle dans ce cas

D'où : dans les deux cas, aucune solution

Conclusion : $S = \emptyset$ (pas de solution dans $\mathbb{R}$)

16 Exercice 16

$n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

✓ Solution

Étape 1 : Tout $n \in \mathbb{N}$ s'écrit : $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Cas 1 : $n = 3k \Rightarrow n$ est divisible par 3

Cas 2 : $n = 3k + 1 \Rightarrow n + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ est divisible par 3

Cas 3 : $n = 3k + 2 \Rightarrow n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ est divisible par 3

D'où : dans les 3 cas, l'un des facteurs n , $n + 1$, $n + 2$ est divisible par 3

Donc : le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

17 Exercice 17

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

✓ Solution

Par l'absurde, on suppose : $2x + 2y - xy - 2 = 2$

Étape 1 : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \Leftrightarrow 2x + 2y - xy - 4 = 0$

Étape 2 : $-xy + 2x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$

On factorise : $xy - 2x - 2y + 4 = x(y - 2) - 2(y - 2) = (x - 2)(y - 2)$

Donc : $(x - 2)(y - 2) = 0$

D'où : $x - 2 = 0$ ou $y - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $y = 2$

Or : ceci contredit l'hypothèse $x \neq 2$ et $y \neq 2$

D'où : l'hypothèse de départ est fausse

Conclusion : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$ (proposition vraie)

18 Exercice 18

$x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

✓ Solution

Par contraposée, on montre : $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$

Étape 1 : $x \neq -5$, donc on multiplie par $(x+5)$: $x+2 = 2(x+5)$

Étape 2 : $x+2 = 2x+10$

Étape 3 : $x-2x = 10-2 \Leftrightarrow -x = 8$

D'où : $x = -8$

Conclusion : par contraposée, $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$ (proposition vraie)

19 Exercice 19

$n \in \mathbb{N}$

Si n^2 est pair alors n est pair

✓ Solution

Par contraposée, on montre : n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Étape 1 : n impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$

Étape 2 : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Étape 3 : $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$

Donc : n^2 est de la forme $2p+1$, donc impair

Conclusion : par contraposée, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair (proposition vraie)

20 Exercice 20

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

✓ Solution

Par contraposée, on montre : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$

Étape 1 : $(x+1)(y-1) = xy - x + y - 1$

Étape 2 : $(x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$

Donc : $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

Étape 3 : on simplifie xy et -1 des deux côtés : $-x + y = x - y$

Étape 4 : $y + y = x + x \Leftrightarrow 2y = 2x$

D'où : $x = y$

Conclusion : par contraposée, $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ (proposition vraie)

21 Exercice 21

$n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

Montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8

✓ Solution

Cas 1 : n ou p pair $\Rightarrow n \times p$ pair $\Rightarrow$ proposition vraie

Cas 2 : n et p impairs

Étape 1 : $\exists k, l \in \mathbb{N} : n = 2k + 1, p = 2l + 1$

Étape 2 : $n^2 - p^2 = (n - p)(n + p)$

Étape 3 : $n - p = 2k + 1 - (2l + 1) = 2(k - l)$

Étape 4 : $n + p = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1)$

Donc : $(n - p)(n + p) = 2(k - l) \times 2(k + l + 1) = 4(k - l)(k + l + 1)$

Étape 5 : $(k - l) + (k + l + 1) = 2k + 1$ est impair

Donc : $k - l$ et $k + l + 1$ ont des parités différentes $\Rightarrow$ l'un des deux est pair

D'où : $(k - l)(k + l + 1)$ est pair, on note $(k - l)(k + l + 1) = 2m$

Étape 6 : $(n - p)(n + p) = 4 \times 2m = 8m$

Conclusion : dans les 2 cas, np pair ou $n^2 - p^2$ multiple de 8 — proposition vraie

22 Exercice 22

$a > 0$ et $b > 0$

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

✓ Solution

On a : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$

Puisque : $1+a > 0$ et $1+b > 0$, on multiplie en croix

Étape 1 : $a(1+b) = b(1+a)$

Étape 2 : $a + a^2 = b + b^2$

Étape 3 : $a^2 - b^2 + a - b = 0$

On factorise : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Étape 4 : $(a-b)(a+b) + (a-b) = 0$

Étape 5 : $(a-b)(a+b+1) = 0$

Puisque : $a > 0$ et $b > 0 \Rightarrow a+b+1 > 0$

D'où : $a-b = 0$

Conclusion : $a = b$

23 Exercice 23

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

✓ Solution

Par l'absurde : Supposons $\exists M > 0$ tel que $f(x) \leq M \forall x \in \mathbb{R}$

On choisit : $x = M$ (car $M > 0 \Rightarrow M \in \mathbb{R}$)

Étape 1 : $f(M) = M^2 + 2M$

Puisque : $M > 0 \Rightarrow M^2 > 0$ et $2M > 0$

Donc : $f(M) = M^2 + 2M > M$

Or : l'hypothèse donne $f(M) \leq M$

D'où : $M < f(M) \leq M$: contradiction

Conclusion : aucun M ne convient, f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$

24 Exercice 24

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

✓ Solution

Par l'absurde : Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Étape 1 : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$ (fraction irréductible)

Étape 2 : $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

Étape 3 : p^2 est pair (multiple de 2)

Or : si p était impair, p^2 serait impair — donc p est pair : $p = 2k$

Étape 4 : $p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

Étape 5 : de même, q^2 est pair $\Rightarrow q$ est pair

Or : p pair et q pair $\Rightarrow \text{pgcd}(p, q) \geq 2$, contradiction avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$

Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

25 Exercice 25

$a, b \in \mathbb{Q}$

1)

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

✓ Solution

On a : $a + b\sqrt{2} = 0$

Étape 1 : $a = -b\sqrt{2}$

Si : $b \neq 0$, on divise par b : $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$

Or : $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Contradiction : avec le résultat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (exercice 24)

D'où : $b = 0$

Étape 2 : $a = -b\sqrt{2} = -0 \times \sqrt{2} = 0$

Conclusion : $a = b = 0$

2)

$$a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

✓ Solution

On a : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$

Étape 1 : $(a - a') + (b - b')\sqrt{2} = 0$

D'après 1) : une somme de cette forme est nulle $\Rightarrow$ chaque partie est nulle

D'où : $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$

Conclusion : $a = a'$ et $b = b'$

26 Exercice 26

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ avec n impair, et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une permutation de A (un réarrangement des éléments de A)

Montrer que : $\exists i \in A / x_i - i$ est pair

✓ Solution

Par l'absurde : Supposons $x_i - i$ impair $\forall i \in A$

Étape 1 : $x_i - i$ impair $\Rightarrow x_i$ et i ont des parités différentes, $\forall i$

On compte : dans $A = \{1, \dots, n\}$ avec n impair, il y a $P = \frac{n-1}{2}$ pairs et $I = \frac{n+1}{2}$ impairs

Étape 2 : à chaque i pair correspond un x_i impair, et à chaque i impair correspond un x_i pair

Donc : parmi les x_i , il y a P valeurs impaires et I valeurs paires

Or : (x_i) est une permutation de A , donc parmi les x_i il y a exactement P valeurs paires et I valeurs impaires (mêmes quantités que dans A)

D'où : $P = I$, or $P = \frac{n-1}{2} \neq \frac{n+1}{2} = I$: contradiction

Conclusion : $\exists i \in A$ tel que $x_i - i$ est pair

27 Exercice 27

$P : (\forall x \in [0; 1]) : x^2 \geq x$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$

Vérification : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Conclusion : La proposition est fausse

28 Exercice 28

$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $x = y = \frac{1}{2}$

Vérification : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Conclusion : La proposition est fausse

29 Exercice 29

$P : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $a = b = 1$

Vérification : $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 2 = 1 + 1$

Conclusion : La proposition est fausse

30 Exercice 30

« Tout entier positif est somme de trois carrés » est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : 7

Carrés disponibles : Les seuls carrés ≤ 7 sont $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$ (car $3^2 = 9 > 7$)

Toutes les sommes de 3 carrés parmi $\{0, 1, 4\}$: $0 + 0 + 0 = 0$, $0 + 0 + 1 = 1$, $0 + 0 + 4 = 4$,
 $0 + 1 + 1 = 2$, $0 + 1 + 4 = 5$, $0 + 4 + 4 = 8$, $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 4 = 6$, $1 + 4 + 4 = 9$,
 $4 + 4 + 4 = 12$

Constat : Aucune de ces sommes n'est égale à 7

Conclusion : 7 n'est pas somme de trois carrés, donc la proposition est fausse

Serie 4 Exercices 31 à 40

31 Exercice 31

$P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $x = -1$

Vérification : $-1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 < 2$

Conclusion : La proposition est fausse

(La propriété est vraie pour $x > 0$ seulement)

32 Exercice 32

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

Montrer que f n'est ni paire ni impaire

✓ Solution

On a : $f(x) = 2x^2 - x + 3$

Étape 1 : $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x) + 3 = 2x^2 + x + 3$

Étape 2 : $-f(x) = -(2x^2 - x + 3) = -2x^2 + x - 3$

On teste f paire : $f(-x) = f(x)$?

Non : $2x^2 + x + 3 \neq 2x^2 - x + 3$ dès que $x \neq 0$

On teste f impaire : $f(-x) = -f(x)$?

Non : $2x^2 + x + 3 \neq -2x^2 + x - 3$

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire

33 Exercice 33

$P : \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a + c \neq b + d$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $a = 0, b = 1, c = 2, d = 1$

Vérification : $a \neq b$ ($0 \neq 1$) et $c \neq d$ ($2 \neq 1$)

Mais : $a + c = 0 + 2 = 2$ et $b + d = 1 + 1 = 2$

Conclusion : La proposition est fausse

34 Exercice 34

$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0$ est fausse

✓ Solution

Contre-exemple : $x = 1$

Étape 1 : $1 - y + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 - y + 1 = 0$

Étape 2 : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pas de solution

Conclusion : La proposition est fausse

35 Exercice 35

$\forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2$

✓ Solution

Étape 1 : $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$

Étape 2 : $(x-1)^2 \geq 0$ et $x > 0$, donc $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

Conclusion : $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$

36 Exercice 36

$x \in \mathbb{R}$

$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

✓ Solution

Étape 1 : $|x - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}$

Étape 2 : on ajoute 1 : $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Étape 3 : on ajoute 1 : $\frac{3}{2} \leq x + 1 \leq \frac{5}{2}$

Puisque : $x + 1 > 0$ sur cet intervalle, la fonction inverse est décroissante $\Rightarrow$ l'ordre s'inverse

Étape 4 : $\frac{1}{\frac{5}{2}} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

Conclusion : chaque étape est une équivalence $\Leftrightarrow$, donc l'équivalence est vraie

37 Exercice 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

✓ Solution

Condition : $\sqrt{x^2 + 1}$ est toujours ≥ 0 , donc il faut $2x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 0$

Étape 1 : $\sqrt{x^2 + 1} = 2x \Rightarrow x^2 + 1 = 4x^2$

Étape 2 : $1 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

Étape 3 : $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (car $x \geq 0$)

Conclusion : $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

38 Exercice 38

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$$

✓ Solution

Étape 1 : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Étape 2 : $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$

D'où : $x^2 + y^2 + xy = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ (somme de 2 carrés)

On calcule : $4(x^2 + y^2 + xy) - (x - y)^2$

Étape 3 : $= 4x^2 + 4y^2 + 4xy - x^2 + 2xy - y^2 = 3x^2 + 6xy + 3y^2$

Étape 4 : $3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x + y)^2$

Puisque : $3(x + y)^2 \geq 0$

Donc : $4(x^2 + y^2 + xy) - (x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 4(x^2 + y^2 + xy)$

La fonction $\sqrt{}$ étant croissante : $\sqrt{(x - y)^2} \leq \sqrt{4(x^2 + y^2 + xy)}$

D'où : $|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$ (car $\sqrt{a^2} = |a|$)

Conclusion : $|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$

39 Exercice 39

1)

$$(\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2) : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

✓ Solution

$$\Rightarrow : a, b \geq 0 \text{ et } a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

$$\Leftarrow : \text{Si } a = b = 0, \text{ alors } a + b = 0$$

Conclusion : L'équivalence est vraie

2)

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

✓ Solution

$$\Rightarrow : \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} \geq 1$$

$$\text{Étape 1 : } \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} = 1$$

$$\text{Étape 2 : } x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Leftarrow : \text{Si } x = y = 0, \text{ alors } \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

Conclusion : L'équivalence est vraie

40 Exercice 40

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq 1 + 2n$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 3^0 = 1 \geq 1 + 2(0) = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $3^n \geq 1 + 2n$ (hypothèse de récurrence)

But : montrer $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$

Étape 1 : $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(1 + 2n)$ (on multiplie l'hypothèse par 3)

Étape 2 : $3(1 + 2n) = 3 + 6n$

Puisque : $n \geq 0 \Rightarrow 4n \geq 0 \Rightarrow 6n \geq 2n$

Donc : $3 + 6n \geq 3 + 2n = 1 + 2n + 2 = 1 + 2(n+1)$

D'où : $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$

Conclusion : la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

41 Exercice 41

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Étape 1 : $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$

Étape 2 : $= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

42 Exercice 42

$$\forall n \geq 5 : 2^n \geq 6n$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 \geq 6 \times 5 = 30$ ✓

Hérédité : Supposons $2^n \geq 6n$ pour un $n \geq 5$

But : montrer $2^{n+1} \geq 6(n + 1)$

Étape 1 : $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2 \times 6n = 12n$

Puisque : $n \geq 5 \Rightarrow 6n \geq 6$

Donc : $12n = 6n + 6n \geq 6n + 6 = 6(n + 1)$

D'où : $2^{n+1} \geq 6(n + 1)$

Conclusion : $\forall n \geq 5 : 2^n \geq 6n$

43 Exercice 43

$\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n$ est divisible par 3

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 0^3 + 2(0) = 0$ divisible par 3 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : n^3 + 2n = 3k$

But : montrer que $(n+1)^3 + 2(n+1)$ est divisible par 3

Étape 1 : $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$

Étape 2 : $= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$

Étape 3 : $= 3k + 3n^2 + 3n + 3$

Étape 4 : $= 3(k + n^2 + n + 1)$

D'où : $(n+1)^3 + 2(n+1)$ est divisible par 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n$ est divisible par 3

44 Exercice 44

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Étape 1 : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

Étape 2 : on met au même dénominateur : $= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

Étape 3 : on factorise par $(n+1)$: $= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$

Étape 4 : $n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$

Étape 5 : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$

D'où : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Conclusion : la formule est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

45 Exercice 45

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 1 \Rightarrow 1^3 = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Étape 1 : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

Étape 2 : on met au même dénominateur : $= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

Étape 3 : on factorise par $(n+1)^2$: $= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4}$

Étape 4 : $n^2 + 4(n+1) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

D'où : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Conclusion : la formule est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

46 Exercice 46

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 1 = 1^2 = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

Étape 1 : $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+1)^2 + (2(n+1)+1)$

Étape 2 : $= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

47 Exercice 47

$\forall n \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 1 + 0 - 1 = 0$ divisible par 9 ✓

Hérédité : Supposons $9 \mid (4^n + 6n - 1)$

Étape 1 : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 6n + 6 - 1$

Étape 2 : $= (4^n + 6n - 1) + 3 \times 4^n + 6$

Étape 3 : $= 9k + 3(4^n + 2)$

Étape 4 : $4 = 3 + 1$, donc $4^n = (3 + 1)^n$. En développant, tous les termes sauf le dernier contiennent un facteur 3, donc $4^n = 3q + 1$ pour un entier q

Étape 5 : Donc $4^n + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1)$, qui est bien divisible par 3, d'où $9k + 3 \times 3(q + 1) = 9k + 9(q + 1) = 9(k + q + 1)$

Conclusion : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ est divisible par 9, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

48 Exercice 48

$\forall n \in \mathbb{N} : 7^n - 1$ est divisible par 6

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ divisible par 6 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : 7^n - 1 = 6k$

Étape 1 : $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6$

Étape 2 : $= 7 \times 6k + 6 = 42k + 6$

Étape 3 : $= 6(7k + 1)$

D'où : $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 7^n - 1$ est divisible par 6

49 Exercice 49

$P(n) : 10^n - 1$ divisible par 9

$Q(n) : 10^n + 1$ divisible par 9

1)

Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

✓ Solution

On suppose : $\exists k \in \mathbb{N} : 10^n - 1 = 9k$

Étape 1 : $10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10(10^n - 1) + 9$

Étape 2 : $= 10 \times 9k + 9 = 90k + 9$

Étape 3 : $= 9(10k + 1)$

Conclusion : $P(n+1)$ est vraie

2)

Démontrer que si $Q(n)$ est vraie alors $Q(n+1)$ est vraie

✓ Solution

On suppose : $\exists k \in \mathbb{N} : 10^n + 1 = 9k$

Étape 1 : $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10(10^n + 1) - 9$

Étape 2 : $= 10 \times 9k - 9 = 90k - 9$

Étape 3 : $= 9(10k - 1)$

Conclusion : $Q(n+1)$ est vraie

3)

Expliquer l'erreur de l'élève

✓ Solution

Erreur : L'élève n'a pas vérifié l'initialisation !

$P(0) : 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ divisible par 9 ✓

$Q(0) : 10^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ n'est pas divisible par 9 ✗

Donc $Q(n)$ est fausse car l'initialisation échoue !

4)

Démontrer que $P(n)$ est vraie

✓ Solution

Initialisation : $P(0)$ vraie ✓

Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (démontré en 1)

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

5)

Démontrer que $Q(n)$ est fausse

✓ Solution

Par l'absurde : Supposons que $Q(n)$ est vraie

Étape 1 : $10^n + 1$ est divisible par 9

Étape 2 : $10^n - 1$ est divisible par 9 (d'après 4)

Étape 3 : $(10^n + 1) - (10^n - 1) = 2$ serait divisible par 9

Étape 4 : Contradiction car 2 n'est pas divisible par 9

Conclusion : $Q(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$

50 Exercice 50

$P(n)$: $7^n - 1$ est divisible par 3

1)

Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

✓ Solution

On suppose : $\exists k \in \mathbb{N} : 7^n - 1 = 3k$

Étape 1 : $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6$

Étape 2 : $= 7 \times 3k + 6 = 21k + 6$

Étape 3 : $= 3(7k + 2)$

Conclusion : $P(n+1)$ est vraie

2)

En déduire, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

✓ Solution

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow 7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ divisible par 3 ✓

Hérédité : démontrée en 1)

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

51 Exercice 51

$a, b \in]-1; 1[$

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

✓ Solution

Étape 1 : Comme $|a| < 1$ et $|b| < 1$, on a $ab > -1$, donc $1 + ab > 0$ (le dénominateur est positif)

Étape 2 : Puisque $1 + ab > 0$, l'inégalité $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$ équivaut à $-(1 + ab) < a + b < 1 + ab$

Étape 3 (partie droite) : $a + b < 1 + ab \Leftrightarrow 0 < 1 - a - b + ab \Leftrightarrow 0 < (1 - a)(1 - b)$, vrai car $a < 1$ et $b < 1$

Étape 4 (partie gauche) : $a + b > -(1 + ab) \Leftrightarrow 0 < 1 + a + b + ab \Leftrightarrow 0 < (1 + a)(1 + b)$, vrai car $a > -1$ et $b > -1$

Conclusion : $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$

52 Exercice 52

Traduire en langage courant puis déterminer la négation et la valeur de vérité :

1)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$$

✓ Solution

Traduction : Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x > y$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq y$

Valeur : Vrai (prendre $y = x - 1$)

2)

$$P : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$$

✓ Solution

Traduction : Il existe un réel x qui est plus grand que tout réel y

Négation : $\forall x \in \mathbb{R}(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y$

Valeur : Faux (aucun réel n'est plus grand que tous les autres)

3)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$$

✓ Solution

Traduction : Pour tout réel x , si $x^2 \geq 4$ alors $x \geq 2$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4$ et $x < 2$

Valeur : Faux (contre-exemple: $x = -3$)

4)

$$P : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = 4$$

✓ Solution

Traduction : Il existe un réel x tel que $x^2 = 4$

Négation : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 4$

Valeur : Vrai ($x = 2$ ou $x = -2$)

53 Exercice 53

À l'aide de la méthode des tables de vérité, dire si la formule est une tautologie.

$$P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$$

✓ Solution

P	Q	$P \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Conclusion : C'est une tautologie

54 Exercice 54

1)

$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$

$$a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \text{ et } 0 \leq \sqrt{ab} \leq b$$

✓ Solution

Étape 1 : $a \leq b \Rightarrow a + a \leq a + b \leq b + b$

Étape 2 : $2a \leq a + b \leq 2b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

Étape 3 : $0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq ab \leq b^2$

Étape 4 : $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

Conclusion : Les inégalités sont vraies

2)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1) \text{ est divisible par } 2$$

✓ Solution

Cas 1 : n pair $\Rightarrow n$ divisible par 2

Cas 2 : n impair $\Rightarrow n+1$ pair

Étape 3 : Dans les deux cas, $n(n+1)$ est divisible par 2

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3)

$n \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier

✓ Solution

Par l'absurde : Supposons que $\sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$

Étape 1 : $\sqrt{n^2 + 1} = k$, avec $k \in \mathbb{N}$

Étape 2 : $n^2 + 1 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - n^2 = 1$

Étape 3 : $(k - n)(k + n) = 1$

Puisque : $k^2 = n^2 + 1 > n^2 \Rightarrow k > n \geq 1 \Rightarrow k + n > 0$ et $k - n > 0$

Donc : $k - n$ et $k + n$ sont 2 entiers positifs dont le produit vaut 1

D'où : $k - n = 1$ et $k + n = 1$

Étape 4 : en additionnant : $2k = 2 \Rightarrow k = 1$, puis $n = k - 1 = 0$

Or : $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1$, contradiction avec $n = 0$

Conclusion : $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$

4)

$\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

✓ Solution

Contre-exemple : $x = -3$

Vérification : $-3 < 2$ mais $(-3)^2 = 9 > 4$

Conclusion : La proposition est fausse

5)

$a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1 + n \times a$$

✓ Solution

Par récurrence :

Initialisation : $n = 0 \Rightarrow (1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $(1+a)^n \geq 1 + na$

Puisque : $1+a > 0$ (car $a \in \mathbb{R}_+^*$), on multiplie l'hypothèse par $(1+a)$

Étape 1 : $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$

Étape 2 : $(1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$

Puisque : $n \geq 0$ et $a^2 \geq 0 \Rightarrow na^2 \geq 0$

Donc : $1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$

D'où : $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1 + na$



Fin des series — Logique Mathematique

Xpert · 1ere Bac Sciences Experimentales · 2026