



Jaouad Elkhayaty
1ERE BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Xpert · Mathematiques · 1ere Bac Sciences Experimentales

EA

Series d'exercices Logique Mathematique

Series d'exercices · sans solutions

5 series - 54 exercices au total (Exercices 1 a 54)

Enonces seuls

5 series

54 exercices

Sommaire

1

Serie 1

Exercices 1 à 10

2

Serie 2

Exercices 11 à 20

3

Serie 3

Exercices 21 à 30

4

Serie 4

Exercices 31 à 40

5

Serie 5

Exercices 41 à 54

1 Exercice 1

Rappel :

- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1)

$$P : \forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$$

2)

$$P : \exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$$

3)

$$P : x \in [1; 2[$$

4)

$$P : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}$$

5)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$$

6)

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n < m$$

7)

$$P : (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ tel que } 2n + 1 \text{ est pair}$$

8)

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$$

9)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$$

10)

$$P : (\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$$

2 Exercice 2

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1.

Le carré de tout réel est positif.

2.

Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3.

Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

4.

Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

5.

Il existe un entier multiple de tous les autres.

6.

Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

3 Exercice 3

Propriété : Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $0 < x < 2$ et $0 < y < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$

4 Exercice 4

Rappel : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

5 Exercice 5

Propriété : $a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$

1)

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

2)

$x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

6 Exercice 6

Propriété : $(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$$

7 Exercice 7

Définition : $a \in \mathbb{Q} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : a = \frac{p}{q}$

Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

8 Exercice 8

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$$

Montrer que :

$$|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}|x - 1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x - 1|$$

9 Exercice 9

Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \in \mathbb{N}$

10 Exercice 10

$$\forall x \in [-2; 2] : 2\sqrt{2} > \sqrt{4 - x^2}$$

Serie 2 Exercices 11 à 20

11 Exercice 11

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq x^2 - x + 1$$

12 Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sqrt{2x + 3} \leq x$$

13 Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x - 1| + 2x - 3 \geq 0$$

14 Exercice 14

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

15 Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^2 - |x - 2| + 5 = 0$$

16 Exercice 16

$$n(n + 1)(n + 2) \text{ est un multiple de 3 pour tout } n \in \mathbb{N}$$

17 Exercice 17

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

18 Exercice 18

$x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

19 Exercice 19

$n \in \mathbb{N}$

Si n^2 est pair alors n est pair

20 Exercice 20

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Serie 3 Exercices 21 à 30

21 Exercice 21

$n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

Montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8

22 Exercice 22

$a > 0$ et $b > 0$

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

23 Exercice 23

$f(x) = x^2 + 2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

24 Exercice 24

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

25 Exercice 25

$a, b \in \mathbb{Q}$

1)

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

2)

$$a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

26 Exercice 26

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ avec n impair, et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une permutation de A (un réarrangement des éléments de A)

Montrer que : $\exists i \in A/x_i - i$ est pair

27 Exercice 27

$P : (\forall x \in [0; 1]) : x^2 \geq x$ est fausse

28 Exercice 28

$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y$ est fausse

29 Exercice 29

$P : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ est fausse

30 Exercice 30

« Tout entier positif est somme de trois carrés » est fausse

Serie 4 Exercices 31 à 40

31 Exercice 31

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ est fausse}$$

32 Exercice 32

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

Montrer que f n'est ni paire ni impaire

33 Exercice 33

$$P : \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a + c \neq b + d \text{ est fausse}$$

34 Exercice 34

$$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0 \text{ est fausse}$$

35 Exercice 35

$$\forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2$$

36 Exercice 36

$$x \in \mathbb{R}$$

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$

37 Exercice 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

38 Exercice 38

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$$

39 Exercice 39

1)

$$(\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2) : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

2)

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

40 Exercice 40

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq 1 + 2n$$

Serie 5 Exercices 41 à 54

41 Exercice 41

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

42 Exercice 42

$$\forall n \geq 5 : 2^n \geq 6n$$

43 Exercice 43

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n \text{ est divisible par } 3$$

44 Exercice 44

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

45 Exercice 45

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

46 Exercice 46

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

47 Exercice 47

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9$$

48 Exercice 48

$$\forall n \in \mathbb{N} : 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6$$

49 Exercice 49

$P(n) : 10^n - 1$ divisible par 9

$Q(n) : 10^n + 1$ divisible par 9

1)

Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

2)

Démontrer que si $Q(n)$ est vraie alors $Q(n+1)$ est vraie

3)

Expliquer l'erreur de l'élève

4)

Démontrer que $P(n)$ est vraie

5)

Démontrer que $Q(n)$ est fausse

50 Exercice 50

$P(n) : 7^n - 1$ est divisible par 3

1)

Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

2)

En déduire, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

51 Exercice 51

$a, b \in]-1; 1[$

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

52 Exercice 52

Traduire en langage courant puis déterminer la négation et la valeur de vérité :

1)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$$

2)

$$P : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$$

3)

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$$

4)

$$P : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = 4$$

53 Exercice 53

À l'aide de la méthode des tables de vérité, dire si la formule est une tautologie.

$$P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$$

54 Exercice 54

1)

$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$

$$a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \text{ et } 0 \leq \sqrt{ab} \leq b$$

2)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1) \text{ est divisible par } 2$$

3)

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{n^2 + 1} \text{ n'est pas un entier}$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 ?$$

5)

$a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1 + n \times a$$



Fin des series — Logique Mathematique

Xpert · 1ere Bac Sciences Experimentales · 2026