



Jaouad Elkhayaty
1ERE BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Xpert · Mathématiques · 1ere Bac Sciences Experimentales

EA

La Logique Mathématique

Cours complet — Propositions, quantificateurs, opérations logiques,
lois logiques et les sept modes de raisonnement

Propositions

Quantificateurs $\forall$ $\exists$

Lois logiques

Raisonnements

Sommaire

1

Notions de base

Proposition, fonction propositionnelle, quantificateurs

2

Operations sur les propositions

Negation, conjonction, disjonction, implication, equivalence

3

Lois logiques - Raisonnements (1-4)

Lois logiques, contre-exemple, equivalences successives, deductif, contraposee

4

Raisonnements (5-7)

Disjonction des cas, absurde, recurrence

5

Resume general

Synthese complete + lettres grecques

Notions de base

Proposition · Fonction propositionnelle · Quantificateurs

Table des matières

1. Proposition
2. Fonction propositionnelle
3. Les quantificateurs

1 Proposition

Définition

On appelle une **proposition** un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être **vrai** ou **faux** (mais pas les deux en même temps).

On note souvent une proposition par les lettres **P**, **Q** ou **R**, etc.

Valeur de vérité d'une proposition :

- Si la proposition est vraie on note **V** ou **1**.
- Si la proposition est fausse on note **F** ou **0**.

Proposition	Valeur de vérité
P	V (1) ou F (0)

Exemples

- **P** : « 2 est un nombre pair » → proposition est **vraie**.
- **Q** : « $2 + 3 = 6$ » → proposition est **fausse**.
- **R** : « ABCD est un parallélogramme alors les diagonales se coupent en leur milieu » → proposition est **vraie**.

Résumé

- Une proposition est un énoncé mathématique qui a une valeur de vérité (Vrai ou Faux).
- On note les propositions par P, Q, R, ...
- La valeur de vérité peut être V (1) ou F (0).

2 Fonction propositionnelle

Définition

On appelle une **fonction propositionnelle**, tout énoncé contenant une variable **x** ou plusieurs variables (x, y, z, ...) et qui appartiennent à des ensembles déterminés.

On note $P(x)$ ou $P(x, y, z, \dots)$.

Remarque

Si on remplace les variables par un élément de ces ensembles, la fonction propositionnelle devient une **proposition**.

Exemples

- **A(x)** : « pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $\sqrt{x^2} = x$ » est une fonction propositionnelle.
 - • si $x = 2$ on obtient une proposition **vraie**.
 - • si $x = -3$ on obtient une proposition **fausse**.
- **A(x, y)** : « pour tout x et y de $\mathbb{R}$ on a $|x + y| = |x| + |y|$ » est une fonction propositionnelle.
 - • si $x = 2$ et $y = 5$ on obtient une proposition **vraie**.
 - • si $x = -2$ et $y = 5$ on obtient une proposition **fausse**.

Résumé

- Une fonction propositionnelle contient une ou plusieurs variables.
- Elle devient une proposition lorsqu'on remplace les variables par des valeurs.
- On note $P(x)$ ou $P(x, y, z, \dots)$.

3 Les quantificateurs

Quantificateur universel

L'expression suivante : « **pour tout** x de E la proposition $Q(x)$ est vraie ».

On la note : $\forall x \in E, Q(x)$

Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit : « *pour tout ...* » ou « *quel que soit ...* »

Exemples

- $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

$\forall x \in E, Q(x)$ vraie



Représentation du quantificateur universel $\forall$

Quantificateur existentiel

L'expression suivante : « **il existe** un x de E tel que la proposition $Q(x)$ est vraie ».

On la note : $\exists x \in E, Q(x)$

Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : « *il existe ...* »

Exemples

- $\exists x \in \mathbb{R} : x + 4 \leq 3$
- $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : a^3 + b^3 = c^2$

$\exists x \in E, Q(x)$ vraie



Il suffit d'un seul x pour lequel $Q(x)$ est vraie

Représentation du quantificateur existentiel $\exists$

Le symbole $\exists!$

L'expression suivante : « **il existe un unique** x de E tel que la proposition $Q(x)$ est vraie ».

On la note : $\exists! x \in E, Q(x)$

Exemples

- $\exists! x \in \mathbb{R} : x + 4 = 3 \rightarrow$ l'équation $x + 4 = 3$ admet une unique solution $x = -1$, donc la proposition est vraie.
- $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 0 \rightarrow$ l'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution $x = 0$ (et non deux solutions distinctes comme $x^2 = 4$), donc la proposition est vraie.

Remarques importantes

- L'ordre des **quantificateurs identiques** (universel ou bien existentiel) **ne change pas** le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des **quantificateurs non identiques** (universel et existentiel) **change** le sens de la fonction propositionnelle.
- La négation du quantificateur $\forall$ est le quantificateur $\exists$.
- La négation du quantificateur $\exists$ est le quantificateur $\forall$.

Écritures équivalentes

- $\forall x \in E, \forall y \in E \iff \forall x, y \in E \iff \forall (x, y) \in E \times E$
- $\exists x \in E, \exists y \in E \iff \exists x, y \in E \iff \exists (x, y) \in E \times E$

Résumé

- $\forall$ = quantificateur universel : « pour tout »
- $\exists$ = quantificateur existentiel : « il existe »
- $\exists!$ = quantificateur existentiel unique : « il existe un unique »
- La négation de $\forall$ est $\exists$, et la négation de $\exists$ est $\forall$.
- L'ordre des quantificateurs différents change le sens.

Opérations sur les propositions

Négation · Conjonction · Disjonction · Implication · Équivalence

Table des matières

1. La négation d'une proposition
2. Conjonction et Disjonction
3. L'implication de deux propositions
4. L'équivalence de deux propositions

1 La négation d'une proposition

Définition

La **négation** d'une proposition P est la proposition qu'on note $\bar{P}$ ou $\neg P$ telle que les valeurs de vérité de P et $\bar{P}$ sont opposées.

Exemples

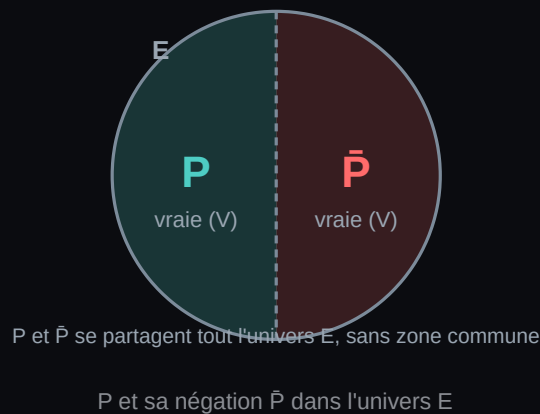
1) P : « 2 est un nombre pair » (vraie)

Sa négation $\bar{P}$ est : « 2 est un nombre **impair** » (fausse)

2) Q : « **3 > 5** » (fausse)

Sa négation $\bar{Q}$ est : « **3 ≤ 5** » (vraie) — attention : la négation de « > » est « ≤ », et non « < ».

P et sa négation $\bar{P}$



P	$\bar{P}$
V (1)	F (0)
F (0)	V (1)

Propriété

$$\bar{\bar{P}} = P \quad \text{ou encore} \quad \neg(\neg P) = P$$

Résumé

- La négation inverse la valeur de vérité.
- Si P est vraie, $\bar{P}$ est fausse.
- Si P est fausse, $\bar{P}$ est vraie.
- La double négation redonne la proposition initiale.

2 Conjonction et Disjonction

A. La conjonction de deux propositions

Définition

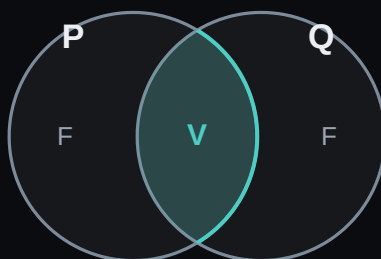
La **conjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ ou bien **P et Q** ; et elle est **vraie** seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples

- 1) « (2 est un nombre pair) $\wedge$ (2 + 3 = 6) » : on a P vraie et Q fausse, donc $P \wedge Q$ est une proposition **fausse**.
- 2) « (3 est un nombre premier) $\wedge$ (4 est un carré parfait) » : on a P vraie et Q vraie, donc $P \wedge Q$ est une proposition **vraie**.

$P \wedge Q$



$P \wedge Q$ est vraie uniquement dans l'intersection

$P \wedge Q$: seule l'intersection est vraie

B. La disjonction de deux propositions

Définition

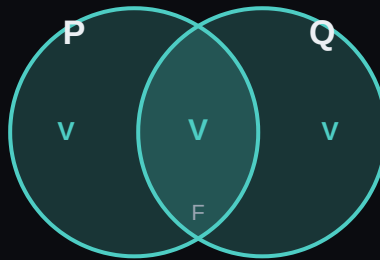
La **disjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ ou bien **P ou Q** ; et elle est **fausse** seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples

- 1) « (2 est un nombre pair) $\vee$ (2 + 3 = 6) » : on a P vraie et Q fausse, donc $P \vee Q$ est une proposition vraie.
- 2) « (4 est un nombre impair) $\vee$ (2 + 2 = 5) » : on a P fausse et Q fausse, donc $P \vee Q$ est une proposition fausse (le seul cas où la disjonction est fausse).

$P \vee Q$



$P \vee Q$ est fausse seulement en dehors de P et de Q

$P \vee Q$: toute la zone couverte est vraie

C. Propriétés

Propriétés

- Commutativité : $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ et $P \vee Q \iff Q \vee P$
- Associativité : $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$
- Idempotence : $P \wedge P \iff P$ et $P \vee P \iff P$

Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q} \quad \text{et} \quad \overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Distributivité

$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Exemple de vérification : soient P : « 5 > 3 » (V), Q : « 5 est pair » (F) et R : « 5 est impair » (V).

D'un côté : $Q \vee R = F \vee V = V$, donc $P \wedge (Q \vee R) = V \wedge V = V$.

De l'autre : $P \wedge Q = V \wedge F = F$ et $P \wedge R = V \wedge V = V$, donc $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) = F \vee V = V$.

Les deux membres valent V : la loi de distributivité est bien vérifiée sur cet exemple.

Résumé

- $P \wedge Q$ (et) : vraie seulement si P et Q sont vraies.
- $P \vee Q$ (ou) : fausse seulement si P et Q sont fausses.
- La conjonction et la disjonction sont commutatives et associatives.
- Lois de Morgan : $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

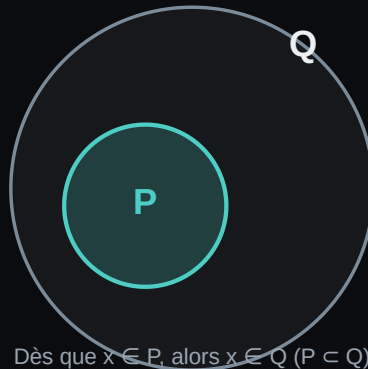
3 L'implication de deux propositions

Définition

L'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$ on lit « P implique Q ».

Elle est équivalente à $\overline{P} \vee Q$.

$$P \Rightarrow Q$$



Dès que $x \in P$, alors $x \in Q$ ($P \subset Q$)

$P \Rightarrow Q$: P est inclus dans Q ($P \subset Q$)

Vocabulaire

- La proposition P s'appelle les **données** (ou **hypothèses**) de l'implication.
- La proposition Q s'appelle la **conclusion** de l'implication.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque importante

- L'implication $P \Rightarrow Q$ est **fausse** seulement dans le cas **P est vraie et Q est fausse**.
- Si P est fausse, l'implication est toujours vraie (quel que soit Q).

Exemples

- « (2 est un nombre pair) $\Rightarrow$ (2 + 3 = 6) » est une proposition **fausse**.
(vraie $\Rightarrow$ fausse = fausse)
- « (2 + 3 = 6) $\Rightarrow$ (2 est un nombre pair) » est une proposition **vraie**.
(fausse $\Rightarrow$ vraie = vraie)

Propriétés

- Transitivité : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
- Négation : $\overline{P \Rightarrow Q} \iff P \wedge \overline{Q}$
- Contraposée : $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Vocabulaire supplémentaire

- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'**implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$.
- L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.
- Si $P \Rightarrow Q$ on n'a pas forcément $Q \Rightarrow P$.

Résumé

- $P \Rightarrow Q$ (P implique Q) équivaut à $\overline{P} \vee Q$.
- Fausse seulement si **P vraie et Q fausse**.
- Contraposée : $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
- La négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$.

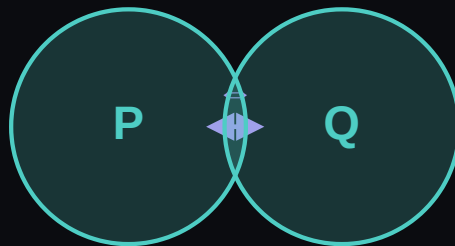
4 L'équivalence de deux propositions

Définition

L'**équivalence** de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ notée $P \Leftrightarrow Q$; on lit « P est équivalente à Q » ou « P si et seulement si Q ».

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$$P \Leftrightarrow Q$$



même valeur de vérité même valeur de vérité
P et Q sont toujours V ensemble ou F ensemble

$P \Leftrightarrow Q$: P et Q désignent le même ensemble de vérité

Exemples

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$

2) P : « 6 est divisible par 3 » (V) et Q : « 6 est un nombre pair » (V).

P et Q ont la même valeur de vérité (toutes les deux vraies), donc $P \Leftrightarrow Q$ est vraie.

Par contre, si on prend R : « 7 est premier » (V) et S : « 7 est pair » (F), alors R et S n'ont pas la même valeur de vérité, donc $R \Leftrightarrow S$ est fausse.

Propriétés

- $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow P$ (commutativité)
- $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$
- Transitivité : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

Résumé

- $P \Leftrightarrow Q$ (P équivaut à Q) signifie que P et Q ont la même valeur de vérité.
- L'équivalence est la **double implication** : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
- L'équivalence est transitive, commutative et se conserve par négation.

Lois logiques — Raisonnements (1-4)

Lois logiques · Contre-exemple · Équivalences successives · Déductif · Contraposée

Table des matières

1. Lois logiques
2. Raisonement par contre-exemple
3. Raisonement par équivalences successives
4. Raisonement déductif
5. Raisonement par contraposée

1 Lois logiques

Définition

Une **loi logique** (ou **tautologie**) est une proposition qui est **toujours vraie** quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la constituent.

Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Distributivité

$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Double négation

$$\overline{\overline{P}} \iff P$$

Contraposée

$$P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

Preuve d'une loi logique

Exemple : Montrons que $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ est une loi logique.

On a, par définition de l'implication :

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \iff \overline{P \wedge Q} \vee P$$

D'après les lois de Morgan :

$$\iff (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee P$$

Par commutativité et associativité de $\vee$, on regroupe $\overline{P}$ et P :

$$\iff (\overline{P} \vee P) \vee \overline{Q}$$

Or $\overline{P} \vee P = \mathbf{V}$ (toujours vraie), donc :

$$\iff \mathbf{V} \vee \overline{Q} \iff \mathbf{V}$$

■ **Remarque :** $\mathbf{V}$ désigne une **proposition toujours vraie** (tautologie). La disjonction d'une tautologie avec n'importe quelle proposition est toujours vraie.

Conclusion : $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ est toujours vraie, c'est donc une loi logique.

Résumé

- Une loi logique est une proposition toujours vraie.
- Lois de Morgan : $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
- La double négation : $\overline{\overline{P}} \iff P$.
- La contraposée : $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
- La distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ et de $\vee$ sur $\wedge$.

2 Raisonnement par contre-exemple

Définition

Pour prouver que la propriété $\forall x \in E, P(x)$ est **fausse**, il suffit de prouver que $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$, ce qu'on appelle un **contre-exemple**).

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par contre-exemple**.

Exemple

Question : Est-ce que la somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel ?

Contre-exemple : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnels.

Vérification : Leur somme est $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ qui n'est pas un nombre irrationnel.

Conclusion : La propriété « la somme de deux irrationnels est irrationnelle » est **fausse**.

$\forall x \in E, P(x)$ — réfutation



x_0 ne vérifie pas P : la propriété $\forall x, P(x)$ est fausse

Un seul contre-exemple suffit pour réfuter $\forall x \in E, P(x)$

Résumé

- On utilise le contre-exemple pour **réfuter** une propriété universelle ($\forall$).
- Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une propriété est fausse.

3 Raisonnement par équivalences successives

Définition

Pour démontrer que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on démontre que :

$$P \Leftrightarrow Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow Q_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q_n \Leftrightarrow Q$$

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par équivalences successives**.

Exemple

Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

on transpose $2ab$ dans le premier membre :

$$\iff a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

on reconnaît une identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:

$$\iff (a - b)^2 = 0$$

or un carré est nul si et seulement si sa base est nulle, d'où :

$$\iff a - b = 0 \iff a = b$$

Conclusion : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b$

Résumé

- On enchaîne des équivalences logiques.
- Si $P \Leftrightarrow Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$, alors $P \Leftrightarrow Q$.
- Utile pour les démonstrations d'égalités ou d'équations.

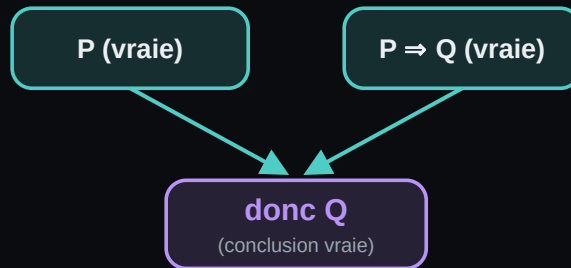
4 Raisonnement déductif

Définition

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a comme donnée la proposition P , alors on déduit que la proposition Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par déduction**.

Modus ponens



P vraie et $P \Rightarrow Q$ vraie entraînent Q vraie

Modus ponens : de P et $P \Rightarrow Q$ on déduit Q

Exemple

On suppose qu'on a démontré la propriété : $\forall a, b > 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

On veut en déduire que : $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

On applique la propriété avec $a = 1$ et $b = x$:

$$\sqrt{1 \times x} \leq \frac{1+x}{2}$$

c'est-à-dire $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$, donc en multipliant les deux membres par 2 :

$$2\sqrt{x} \leq 1+x$$

Conclusion : $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

Résumé

- Si $P \Rightarrow Q$ est vraie et P est vraie, alors Q est vraie.
- Le raisonnement déductif utilise la règle du **modus ponens**.
- Forme générale : P (donnée) et $P \Rightarrow Q$ (théorème) $\Rightarrow Q$ (conclusion).

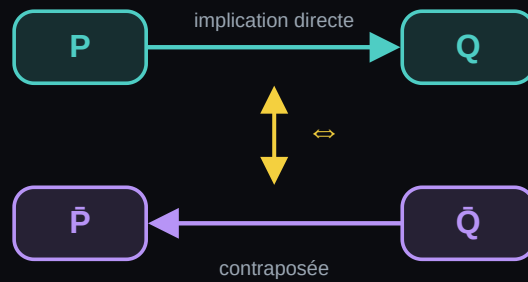
5 Raisonnement par contraposée

Définition

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer l'implication $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par contraposée**.

Implication et contraposée



$P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

$P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalentes

Exemple

Montrer que : $\forall x, y \in]2, +\infty[, x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$

On utilise un raisonnement par contraposée.

Il suffit de démontrer : $\forall x, y \in]2, +\infty[, x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$

Soient $x, y \in]2, +\infty[$ tels que $x^2 - 4x = y^2 - 4y$. On a :

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y$$

on ajoute 4 aux deux membres :

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$$

on reconnaît des identités remarquables :

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = (y - 2)^2$$

or $x, y > 2$ donc $x - 2 > 0$ et $y - 2 > 0$; deux nombres positifs de carrés égaux sont égaux, d'où :

$$\Rightarrow x - 2 = y - 2 \Rightarrow x = y$$

Conclusion : L'implication contraposée est vraie, donc l'implication initiale est vraie.

Résumé

- $P \Rightarrow Q \iff \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
- Utile quand il est plus facile de démontrer la contraposée.
- Souvent utilisé pour les implications avec des inégalités.

Raisonnements (5-7)

Disjonction des cas · Absurde · Récurrence

Table des matières

1. Raisonnement par disjonction des cas
2. Raisonnement par l'absurde
3. Raisonnement par récurrence

1 Raisonnement par disjonction des cas

Définition

Lorsqu'on utilise **plusieurs cas** dans une démonstration, le raisonnement utilisé s'appelle **raisonnement par disjonction des cas**.

Exemple

Résoudre l'équation suivante : $|x + 1| + 2x = 0, x \in \mathbb{R}$

1er cas : $x \in]-\infty, -1]$

Dans ce cas $x + 1 \leq 0$, donc $|x + 1| = -(x + 1)$. On a :

$$|x + 1| + 2x = 0 \iff -(x + 1) + 2x = 0$$

on développe et on réduit :

$$\iff -x - 1 + 2x = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

or $1 \notin]-\infty, -1]$, cette valeur est à rejeter. Donc : $S_1 = \emptyset$

2ème cas : $x \in [-1, +\infty[$

Dans ce cas $x + 1 \geq 0$, donc $|x + 1| = x + 1$. On a :

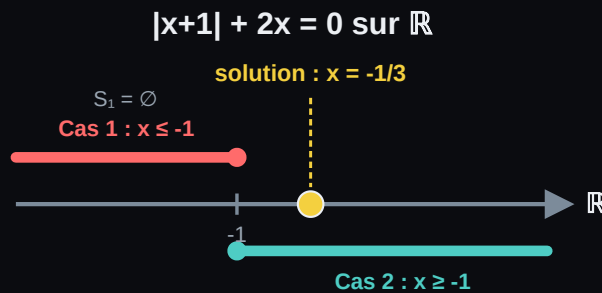
$$|x + 1| + 2x = 0 \iff (x + 1) + 2x = 0$$

on développe et on réduit :

$$\iff 3x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$$

or $-\frac{1}{3} \in [-1, +\infty[$, cette valeur est acceptée. Donc : $S_2 = \{-\frac{1}{3}\}$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \{-\frac{1}{3}\}$



$$S = S_1 \cup S_2 = \{-1/3\}$$

Les deux cas sur $\mathbb{R}$ et la position de la solution trouvée

Résumé

- On divise le problème en plusieurs cas possibles.
- On résout chaque cas séparément.
- La solution finale est l'union des solutions de chaque cas.
- Utile pour les équations avec valeurs absolues ou les inégalités.

2 Raisonnement par l'absurde

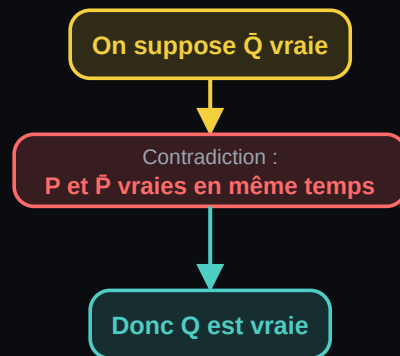
Définition

Pour démontrer qu'une proposition Q est vraie :

- On suppose que $\bar{Q}$ (la négation de Q) est vraie.
- Au cours de la démonstration, on obtient une contradiction (P et $\bar{P}$ sont vraies en même temps).
- Donc notre supposition $\bar{Q}$ est vraie est absurde ; d'où **Q est vraie**.

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par l'absurde**.

Raisonnement par l'absurde



Le principe du raisonnement par l'absurde

Exemple 1

Soient r un nombre rationnel et i un nombre irrationnel et $s = r + i$.

Montrer que s est un nombre irrationnel.

On utilise un raisonnement par l'absurde :

On suppose que s est un nombre **rationnel**. On a :

$$s = r + i \iff i = s - r$$

Or s et r sont tous les deux rationnels par supposition, et la somme (ou différence) de deux rationnels est rationnelle, donc $s - r$ est **rationnel**.

Mais $i = s - r$, donc i serait rationnel — ce qui contredit le fait que i est irrationnel.

Contradiction !

Conclusion : La supposition « s est rationnel » est fausse. Donc **s est irrationnel**.

Exemple 2 : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel).

On utilise un raisonnement par l'absurde :

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre **rationnel**. Il existe alors $p, q \in \mathbb{Z}^*$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$ tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

en élevant au carré :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

donc p^2 est pair, ce qui entraîne que p lui-même est pair : on pose $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant :

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

donc q^2 est pair, donc q est pair également.

Contradiction ! p et q sont tous les deux pairs, donc $\text{pgcd}(p, q) \geq 2 \neq 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Résumé

- On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer.
- On cherche une contradiction (P et $\overline{P}$ vraies en même temps).
- La contradiction montre que la supposition était fausse.
- La proposition initiale est donc vraie.
- Utile pour démontrer des irrationalités ou des impossibilités.

3 Raisonnement par récurrence

Définition

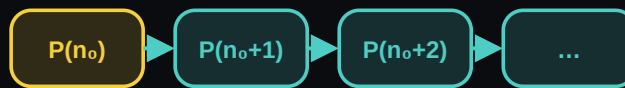
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entiers naturels n tel que $n \geq n_0$.

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on utilise les étapes suivantes :

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence).
- **Conclusion** : On démontre que $P(n+1)$ est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle **raisonnement par récurrence**.

Récurrence : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$



initialisation

hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ transmet la propriété de proche en proche

La propriété se transmet de proche en proche

Exemple 1 : Somme des entiers

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation :

Pour $n = 1$: $1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ ✓ la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. Supposons que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (hypothèse de récurrence), et montrons que la propriété reste vraie au rang $n+1$. On a :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

on met au même dénominateur puis on factorise par $(n+1)$:

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2 : Divisibilité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n$ est divisible par 3

Initialisation :

Pour $n = 0$: $0^3 + 2 \times 0 = 0$ est divisible par 3 ✓ la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \geq 0$. Supposons que $3 \mid (n^3 + 2n)$, c.à.d. qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 + 2n = 3k$ (hypothèse de récurrence), et montrons que $3 \mid [(n+1)^3 + 2(n+1)]$. On développe :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$

on regroupe $n^3 + 2n$ (que l'on remplace par $3k$) avec le reste :

$$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3n^2 + 3n + 3$$

on met 3 en facteur commun :

$$= 3(k + n^2 + n + 1)$$

donc $(n+1)^3 + 2(n+1)$ est bien un multiple de 3.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Résumé

- **Initialisation :** Vérifier $P(n_0)$.
- **Hérédité :** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- **Conclusion :** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.
- Utile pour les formules de sommes, les propriétés de divisibilité, les inégalités sur les entiers.

Résumé général

Synthèse complète du chapitre + lettres grecques

Table des matières

1. Propositions et Quantificateurs
2. Opérations logiques
3. Lois logiques
4. Types de raisonnements
5. Tableau récapitulatif
6. Lettres grecques

1 Propositions et Quantificateurs

Proposition

Énoncé mathématique qui a un sens, pouvant être **vrai** (V ou 1) ou **faux** (F ou 0).

Exemple : $P = \ll 2 \text{ est un nombre pair} \gg$ (Vraie)

Fonction propositionnelle

Énoncé contenant une ou plusieurs variables. Elle devient une proposition lorsqu'on remplace les variables par des valeurs.

Exemple : $A(x) = \ll x^2 = 4 \gg \rightarrow A(2) = \text{Vraie}, A(3) = \text{Fausse}$

Quantificateurs

- $\forall$ = Quantificateur universel : « pour tout » ou « quel que soit »
- $\exists$ = Quantificateur existentiel : « il existe »
- $\exists!$ = Quantificateur existentiel unique : « il existe un unique »

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in E, P(x)) &\iff \exists x \in E, \neg P(x) \\ \neg(\exists x \in E, P(x)) &\iff \forall x \in E, \neg P(x)\end{aligned}$$

Important

- L'ordre des quantificateurs **identiques** ($\forall\forall$ ou $\exists\exists$) ne change pas le sens.
- L'ordre des quantificateurs **différents** ($\forall\exists$ ou $\exists\forall$) change le sens.

2 Opérations logiques

Négation ($\overline{P}$ ou $\neg P$)

Inverse la valeur de vérité de P.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Conjonction ($P \wedge Q$) : « P et Q »

Vraie seulement si P et Q sont vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction ($P \vee Q$) : « P ou Q »

Fausse seulement si P et Q sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implication ($P \Rightarrow Q$) : « P implique Q »

Équivaut à $\overline{P} \vee Q$. Fausse seulement si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Contraposée : $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Équivalence ($P \Leftrightarrow Q$) : « P équivaut à Q »

Équivaut à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Vraie si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3 Lois logiques

Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Distributivité

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Autres lois

- Double négation : $\overline{\overline{P}} = P$
- Contraposée : $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- Transitivité : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
- Commutativité : $P \wedge Q = Q \wedge P$ et $P \vee Q = Q \vee P$
- Associativité : $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
- Idempotence : $P \wedge P = P$ et $P \vee P = P$

4 Types de raisonnements

1. Contre-exemple

Pour montrer que $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, on trouve un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exemple : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme = 0 est rationnel.

2. Équivalences successives

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on enchaîne :

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$$

Exemple : $a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b$

3. Déductif

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie et P est vraie, alors Q est vraie.

Exemple : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ avec $a = 1, b = x$ donne $2\sqrt{x} \leq 1 + x$

4. Contraposée

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on montre $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Exemple : $x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$

5. Disjonction des cas

On divise le problème en plusieurs cas et on résout chacun séparément.

Exemple : $|x + 1| + 2x = 0$ avec $x \leq -1$ et $x \geq -1$

6. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer, on cherche une contradiction.

Exemples : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $r + i$ est irrationnel

7. Raisonnement par récurrence

Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

- Initialisation : Vérifier $P(n_0)$
- Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

Exemples : Somme des entiers, $n^3 + 2n$ divisible par 3

5 Tableau récapitulatif

Opération	Notation	Vraie si	Fausse si
Négation	$\overline{P}$	P est fausse	P est vraie
Conjonction	$P \wedge Q$	P et Q vraies	P ou Q fausse
Disjonction	$P \vee Q$	P ou Q vraie	P et Q fausses
Implication	$P \Rightarrow Q$	P fausse ou Q vraie	P vraie et Q fausse
Équivalence	$P \Leftrightarrow Q$	P et Q même valeur	P et Q valeurs différentes

6 Lettres grecques

Lettre	Nom	Lettre	Nom
α	alpha	ν	nu
β	bêta	ξ	xi
γ	gamma	$\omicron$	omicron
δ	delta	π	pi
ε	epsilon	ρ	rhô
ζ	zêta	σ	sigma
η	êta	τ	tau
θ	thêta	υ	upsilon
ι	iota	φ	phi
κ	kappa	χ	chi
λ	lambda	ψ	psi
μ	mu	ω	oméga



Fin du cours — Logique Mathématique

Xpert · 1ere Bac Sciences Experimentales · 2026