



Jaouad Elkhayaty
1ERE BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Xpert · Mathematiques · 1ere Bac Sciences Experimentales

EA

Exercices

Logique Mathematique

Serie d'exercices · corrige detaille

8 exercices progressifs - du niveau facile au niveau difficile

Avec corrige detaille

8 exercices

Facile → Difficile

Sommaire

1

Facile

Valeur de vérité et négation

2

Facile

Quantificateurs

3

Facile

Valeur de vérité

4

Moyen

Raisonnement

5

Moyen

Lois logiques

6

Moyen

Implication - Contraposée - Négation

7

Difficile

Raisonnement par récurrence

8

Difficile

Récurrence - Sommes

1 Déterminer la valeur de vérité et la négation

Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) et la négation de chaque proposition.

a.

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Vrai

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq x \wedge |x| \neq x$

On a : $x^2 \leq x \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

Sur $[0, 1]$: $x \geq 0$, d'où $|x| = x$

Ailleurs : l'hypothèse $x^2 \leq x$ est fausse, donc l'implication est vraie

Conclusion : Vrai

b.

$$\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Faux

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 = 4 \nLeftrightarrow x = 2)$

On a : $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Or : pour $x = -2$: $x^2 = 4$ vraie mais $x = 2$ fausse

Donc : l'équivalence est fausse ($x = -2$ contre-exemple)

Conclusion : Faux

c.

$$(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Faux

Négation : $(7 \geq 5 \text{ ou } 2 + 1 \neq 3) \text{ et } (-3 \notin \mathbb{N})$

On a : $7 < 5$: Faux ; $2 + 1 = 3$: Vrai

Donc : $(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3)$: Faux

Et : $-3 \in \mathbb{N}$: Faux

Alors : Faux ou Faux = Faux

Conclusion : Faux

d.

$$(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Vrai

Négation : $(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 \neq 0) \text{ et } (-3 \notin \mathbb{N})$

On a : $7 < 5$: Faux ; $2 + 1 = 0$: Faux

Donc : $(\text{Faux} \Rightarrow \text{Faux}) = \text{Vrai}$

Et : $-3 \in \mathbb{N}$: Faux

Alors : Vrai ou Faux = Vrai

Conclusion : Vrai

e.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq n. \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Faux

Négation : $(\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 > n) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x)$

On a : $\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq n$: Vrai ($n = 1$)

Et : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x$: Faux ($x = 2$)

Donc : Vrai . Faux = Faux

Conclusion : Faux

f.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y + 3 = 0. \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x - y + 3 = 0$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Faux

Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x - y + 3 \neq 0)$ ou $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x - y + 3 \neq 0)$

On a : $\forall x, \exists y, x - y + 3 = 0$: Vrai ($y = x + 3$ convient)

Et : $\exists y, \forall x, x - y + 3 = 0$: Faux (y fixe ne peut convenir pour tout x)

Donc : Vrai . Faux = Faux

Conclusion : Faux

g.

$$\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

✓ Solution

Valeur de vérité : Faux

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}; \left(\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \nLeftrightarrow x \geq 1 \right)$

On a : $\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$

D'où : l'équivalence avec « $x \geq 1$ » seul est fausse (ex: $x = -2$)

Conclusion : Faux

2 Écrire avec les quantificateurs

Écrire les expressions suivantes en utilisant les quantificateurs qui correspondent.

a.

Le carré d'un nombre réel est positif.

✓ Solution

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

(ou $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ pour strictement positif)

b.

Il n'existe pas un nombre rationnel qui est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

✓ Solution

$$\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 3 = 0$$

Ou encore : $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - 3 \neq 0$

c.

Pour tout nombre entier naturel n , il existe au moins un entier naturel k tel que $k \leq n$.

✓ Solution

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k \leq n$$

(Par exemple, on peut prendre $k = 0$ pour tout n)

3 Déterminer la valeur de vérité

Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) des propositions suivantes.

a.

$$x \in \mathbb{R}; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$$

✓ Solution

Valeur : Faux

On a : $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Or : pour $x = -2$: $x^2 = 4$ vraie mais $x = 2$ fausse

Donc : l'équivalence $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ est fausse ($x = -2$ est un contre-exemple)

b.

$$(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

✓ Solution

Valeur : Faux

On a : $7 < 5$: Faux

Et : $2 + 1 = 3$: Vrai

Donc : $(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) = \text{Faux et Vrai} = \text{Faux}$

On a : $-3 \in \mathbb{N}$: Faux

Alors : Faux ou Faux = Faux

c.

$$(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

✓ Solution

Valeur : Vrai

On a : $7 < 5$: Faux

Et : $2 + 1 = 0$: Faux

Donc : $(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0) = (\text{Faux} \Rightarrow \text{Faux}) = \text{Vrai}$

On a : $-3 \in \mathbb{N}$: Faux

Alors : Vrai ou Faux = Vrai

d.

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$$

✓ Solution

Valeur : Vrai

On a : $x^2 \leq x \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

Sur $[0, 1]$: $x \geq 0$, d'où $|x| = x$

Ailleurs : l'hypothèse $x^2 \leq x$ est fausse, donc l'implication est vraie

D'où : dans les deux cas, la proposition est vraie

4 Méthodes de raisonnement

Utiliser différentes méthodes de raisonnement pour démontrer les propositions suivantes.

1.

Contre-exemple : Montrer que la relation suivante est fausse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2$$

✓ Solution

Contre-exemple : $x = 0$

On a : $0 \times y = 0 \neq 2$, quel que soit y

Conclusion : La proposition est **fausse**

2.

Contraposée : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$$

✓ Solution

Contraposée : $xy + 1 = x + y \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } y = 1)$

On a : $xy + 1 = x + y$

Donc : $xy + 1 - x - y = 0$

On factorise : $(x - 1)(y - 1) = 0$

D'où : $x = 1$ ou $y = 1$

Conclusion : La proposition est vraie.

3.

Contraposée : Avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 2a$, montrer que :

$$b \neq \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$$

✓ Solution

Contraposée : $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{6}{7} \Rightarrow b = \frac{a}{4}$

On a : $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{6}{7}$

On multiplie en croix : $7(a + 2b) = 6(2a - b)$

Donc : $7a + 14b = 12a - 6b$

Alors : $20b = 5a$

D'où : $b = \frac{a}{4}$

Conclusion : La proposition est vraie.

4.

Absurde : Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

✓ **Solution**

Par l'absurde : Supposons $\exists r \in \mathbb{Q} : r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

On pose : $q = r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Alors : $\sqrt{2} = q - r$

Or : $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow q - r \in \mathbb{Q}$

Donc : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Conclusion : La proposition est vraie.

5a.

Absurde : Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + b = 0 \Rightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$$

✓ **Solution**

Par l'absurde : Supposons $a + b = 0$ et $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$

On a : $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \geq 0$ et $b \geq 0$

Si : $a > 0$, alors $b = -a < 0$, contradiction avec $b \geq 0$

Si : $b > 0$, alors $a = -b < 0$, contradiction avec $a \geq 0$

Donc : $a = 0$ et $b = 0$

Conclusion : La proposition est vraie.

5b.

Déduction : Résoudre l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

✓ **Solution**

On a : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

On regroupe : $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$

On factorise : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

Puisque : $(x - 1)^2 \geq 0$ et $(y + 2)^2 \geq 0$

Alors : $(x - 1)^2 = 0$ et $(y + 2)^2 = 0$

D'où : $x = 1$ et $y = -2$

Conclusion : La solution est $(1, -2)$.

5 Lois logiques

Étudier, par deux méthodes différentes, si chaque proposition est une loi logique (tautologie).

a.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

✓ Solution

Méthode 1 - Table de vérité :

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Méthode 2 - Équivalences :

$$\text{On a : } p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee p)$$

$$\text{Donc : } \equiv (\neg p \vee p) \vee \neg q$$

$$\text{D'où : } \equiv V \vee \neg q \equiv V$$

Conclusion : C'est une tautologie.

b.

$$p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

✓ Solution

Méthode 1 - Table de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On remarque : pour $p = V$ et $q = F$, la proposition est fausse

Conclusion : Ce n'est pas une loi logique.

c.

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

✓ Solution

Méthode 1 - Table de vérité :

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

On remarque : pour $p = F$ et $q = V$, la proposition est fausse

Conclusion : Ce n'est pas une loi logique.

d.

Disjonction des cas : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

✓ Solution

Cas 1 : n est pair ($n = 2k$)

$$\text{On a : } \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1) \in \mathbb{N}$$

Cas 2 : n est impair ($n = 2k+1$)

$$\text{On a : } n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$$

$$\text{Donc : } \frac{n(n^2+1)}{2} = n(2k^2 + 2k + 1) \in \mathbb{N}$$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e.

Équivalences successives : Montrer que :

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

✓ Solution

On a : $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Par définition de $\Rightarrow$: $\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

Par associativité de $\vee$: $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$

Par loi de De Morgan : $\equiv \neg(p \wedge q) \vee r$

D'où : $\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

Conclusion : Les deux propositions sont équivalentes.

f.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer que :

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

✓ Solution

On a : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$

On réécrit : $x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

On factorise : $(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0$

Puisque : $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{y} - 1)^2 \geq 0$

Alors : $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$ et $(\sqrt{y} - 1)^2 = 0$

D'où : $\sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1$

Donc : $x = 1$ et $y = 1$

Conclusion : $x = y = 1$.

6 Étude d'une implication

On considère l'implication suivante :

$$P(a, b) : a + b + ab + 1 = 0 \Rightarrow (a = -1 \text{ ou } b = -1)$$

1.

Déterminer l'implication contraposée de $P(a, b)$.

✓ Solution

$$\text{Contraposée : } P'(a, b) : (a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab + 1 \neq 0$$

(On utilise $\neg(A \text{ ou } B) \equiv \neg A \text{ et } \neg B$)

2.

Déterminer la négation de $P(a, b)$.

✓ Solution

Négation :

$$\neg P(a, b) : a + b + ab + 1 = 0 \text{ et } a \neq -1 \text{ et } b \neq -1$$

(On utilise $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \text{ et } \neg B$)

et $\neg(a = -1 \text{ ou } b = -1) \equiv a \neq -1 \text{ et } b \neq -1$

3.

Montrer que $P(a, b)$ est une implication vraie.

✓ Solution

$$\text{On a : } a + b + ab + 1 = 0$$

$$\text{On réarrange : } a + 1 + b + ab = 0$$

$$\text{On factorise : } (a + 1) + b(a + 1) = 0$$

$$\text{Donc : } (a + 1)(1 + b) = 0$$

$$\text{D'où : } a + 1 = 0 \text{ ou } b + 1 = 0$$

$$\text{Alors : } a = -1 \text{ ou } b = -1$$

Conclusion : L'implication $P(a, b)$ est vraie.

7 Étude d'une implication avec quantificateurs

On considère l'implication suivante :

$$P : \forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = \frac{1}{2}(x + y + 1)) \Rightarrow (x = 1 \text{ et } y = 2)$$

1.

Écrire P sans utiliser le connecteur $\Rightarrow$.

✓ Solution

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 \neq \frac{1}{2}(x + y + 1)) \text{ ou } (x = 1 \text{ et } y = 2)$$

(On utilise $A \Rightarrow B \equiv \neg A \text{ ou } B$)

2.

Déterminer la négation de P .

✓ Solution

$$\exists x \in [0, +\infty[, \exists y \in [1, +\infty[: \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = \frac{1}{2}(x + y + 1)) \text{ et } (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 2)$$

(On utilise $\neg(\forall) \equiv \exists$ et $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \text{ et } \neg B$)

3.

Déterminer l'implication contraposée de P .

✓ Solution

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \\ (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 2) \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 \neq \frac{1}{2}(x + y + 1))$$

4.

Déterminer la valeur de vérité de P .

✓ Solution

Valeur de vérité : Vrai

$$\text{On a : } \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = \frac{1}{2}(x + y + 1)$$

$$\text{On multiplie par 2 : } 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2 = x + y + 1$$

$$\text{On réarrange : } x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} + 3 = 0$$

$$\text{On factorise : } (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 + 1 = 0$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = -1$$

Or : une somme de carrés est toujours ≥ 0 , elle ne peut jamais valoir -1

Donc : l'hypothèse est toujours fausse (aucune solution)

Puisque : une implication d'hypothèse toujours fausse est toujours vraie (vraie par vacuité)

Conclusion : P est Vraie.

Exercice 7 Raisonement par récurrence Difficile

8 Récurrence - Partie 1

Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

✓ Solution

Vérification à $n = 0$:

On calcule : $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25 = 5 \times 5$ ✓ (divisible par 5)

Vérification à $n = 1$:

On calcule : $3^3 + 2^5 = 27 + 32 = 59$ (59 n'est pas divisible par 5)

La propriété est vraie pour $n = 0$ mais fausse pour $n = 1$: elle n'est donc **pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** . La récurrence ne peut pas fonctionner ici, car l'hérédité échoue (essayer de la "forcer" mènerait à une étape fausse).

Conclusion : La propriété est fausse ($n = 1$ est un contre-exemple).

b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

✓ Solution

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $3^3 + 2^5 = 27 + 32 = 59$

Or : 59 n'est pas divisible par 5

Conclusion : La propriété est fausse pour $n = 1$, donc fausse sur $\mathbb{N}^*$.

(Comme en (a), la propriété n'est vraie qu'à $n = 0$; c'est un cas isolé, pas une propriété valable pour tout n .)

c.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 3 divise $4n^3 - n$.

✓ Solution

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $4(1)^3 - 1 = 4 - 1 = 3$, divisible par 3 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : 4n^3 - n = 3k$

On développe : $4(n+1)^3 - (n+1) = 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1$

On réécrit : $= (4n^3 - n) + 12n^2 + 12n + 3$

On remplace : $= 3k + 3(4n^2 + 4n + 1)$

D'où : $= 3(k + 4n^2 + 4n + 1)$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 8 divise $1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$.

✓ Solution

Initialisation : $n = 0$

On calcule : $1 + 5^1 + 2 \times 3^0 = 1 + 5 + 2 = 8$, divisible par 8 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : 1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n = 8k$

On développe : $1 + 5^{n+2} + 2 \times 3^{n+1}$

On réécrit : $= (1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n) + (5^{n+2} - 5^{n+1}) + 2(3^{n+1} - 3^n)$

On remplace : $= 8k + 5^{n+1}(5 - 1) + 2 \times 3^n(3 - 1)$

Donc : $= 8k + 4 \times 5^{n+1} + 4 \times 3^n$

On factorise : $= 8k + 4(5^{n+1} + 3^n)$

Or : 5^{n+1} est impair et 3^n est impair, donc leur somme est paire, on pose $5^{n+1} + 3^n = 2m$

D'où : $= 8k + 4(2m) = 8(k + m)$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $4^n + 6n - 1$.

✓ Solution

Initialisation : $n = 0$

On calcule : $4^0 + 6(0) - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$, divisible par 9 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1 = 9k$

On développe : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 6n + 6 - 1$

On réécrit : $= 4(4^n + 6n - 1) - 18n + 9$

On remplace : $= 4(9k) - 9(2n - 1)$

D'où : $= 9(4k - 2n + 1)$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

✓ Solution

Initialisation : $n = 0$

On calcule : $3 \times 5^1 + 2^1 = 15 + 2 = 17$, divisible par 17 ✓

Hérédité : Supposons $\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k$

On développe : $3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$

On réécrit : $= 25 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1}$

On sépare $25 = 17 + 8$: $= 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1}$

On regroupe : $= 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$

Par hérédité : $= 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 17k$

D'où : $= 17(3 \times 5^{2n+1} + 8k)$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 Récurrence - Sommes

Difficile

8 Récurrence - Partie 2

Montrer par récurrence les formules de sommes suivantes.

g.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

✓ Solution

Initialisation : $n = 0$

On calcule : $\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = 1 = (0 + 1)^2 = 1$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$

On a : $\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) = \sum_{i=0}^n (2i + 1) + (2n + 3)$

On remplace : $= (n + 1)^2 + 2n + 3$

On développe : $= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

D'où : $= n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

✓ Solution

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

On a : $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

On met au même dénominateur : $= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$

On développe : $= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

On factorise : $= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

D'où : $= \frac{n+1}{n+2}$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

✓ Solution

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2(1)+1}$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

On a : $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

On met au même dénominateur : $= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$

On développe : $= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$

On factorise : $= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

D'où : $= \frac{n+1}{2n+3}$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

j.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

✓ Solution

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $1 \times 3 = 3$

Et : $\frac{1 \times 2 \times 9}{6} = \frac{18}{6} = 3$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3)$

On factorise par $(n+1)$: $= \frac{(n+1)}{6} [n(2n+7) + 6(n+3)]$

On développe : $= \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + 7n + 6n + 18]$

Donc : $= \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + 13n + 18]$

On factorise : $2n^2 + 13n + 18 = (n+2)(2n+9)$

D'où : $= \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

k.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

✓ Solution

Remarque : $\sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k(k+1)$

Initialisation : $n = 1$

On calcule : $1 \times 2 = 2$

Et : $\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$ ✓

Hérédité : Supposons $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$

On factorise par $(n+1)(n+2) : = \frac{(n+1)(n+2)}{3} (n+3)$

D'où : $= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



Fin de la serie — Exercices Logique Mathématique

Xpert · 1ere Bac Sciences Experimentales · 2026