



Jaouad Elkhayaty
1ERE BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Xpert · Mathematiques · 1ere Bac Sciences Experimentales

EA

Exercices

Logique Mathematique

Serie d'exercices · sans solutions

8 exercices progressifs - du niveau facile au niveau difficile

Enonce seul

8 exercices

Facile → Difficile

Sommaire

1

Facile

Valeur de vérité et négation

2

Facile

Quantificateurs

3

Facile

Valeur de vérité

4

Moyen

Raisonnement

5

Moyen

Lois logiques

6

Moyen

Implication - Contraposée - Négation

7

Difficile

Raisonnement par récurrence

8

Difficile

Récurrence - Sommes

Exercice 1 Valeur de vérité et négation

Facile

1 Déterminer la valeur de vérité et la négation

Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) et la négation de chaque proposition.

a.

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$$

b.

$$\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$$

c.

$$(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

d.

$$(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

e.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq n. \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x$$

f.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y + 3 = 0. \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x - y + 3 = 0$$

g.

$$\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

2 Écrire avec les quantificateurs

Écrire les expressions suivantes en utilisant les quantificateurs qui correspondent.

a.

Le carré d'un nombre réel est positif.

b.

Il n'existe pas un nombre rationnel qui est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

c.

Pour tout nombre entier naturel n , il existe au moins un entier naturel k tel que $k \leq n$.

Exercice 3 Valeur de vérité Facile

3 Déterminer la valeur de vérité

Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) des propositions suivantes.

a.

$$x \in \mathbb{R}; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$$

b.

$$(7 < 5 \text{ et } 2 + 1 = 3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

c.

$$(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$$

d.

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$$

4 Méthodes de raisonnement

Utiliser différentes méthodes de raisonnement pour démontrer les propositions suivantes.

1.

Contre-exemple : Montrer que la relation suivante est fausse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2$$

2.

Contraposée : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$$

3.

Contraposée : Avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 2a$, montrer que :

$$b \neq \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$$

4.

Absurde : Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

5a.

Absurde : Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + b = 0 \Rightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$$

5b.

Déduction : Résoudre l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

5 Lois logiques

Étudier, par deux méthodes différentes, si chaque proposition est une loi logique (tautologie).

a.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

b.

$$p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

c.

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

d.

Disjonction des cas : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

e.

Équivalences successives : Montrer que :

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

f.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer que :

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

6 Étude d'une implication

On considère l'implication suivante :

$$P(a, b) : a + b + ab + 1 = 0 \Rightarrow (a = -1 \text{ ou } b = -1)$$

1.

Déterminer l'implication contraposée de $P(a, b)$.

2.

Déterminer la négation de $P(a, b)$.

3.

Montrer que $P(a, b)$ est une implication vraie.

7 Étude d'une implication avec quantificateurs

On considère l'implication suivante :

$$P : \forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = \frac{1}{2}(x + y + 1)) \Rightarrow (x = 1 \text{ et } y = 2)$$

1.

Écrire P sans utiliser le connecteur $\Rightarrow$.

2.

Déterminer la négation de P .

3.

Déterminer l'implication contraposée de P .

4.

Déterminer la valeur de vérité de P .

8 Récurrence - Partie 1

Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

c.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 3 divise $4n^3 - n$.

d.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 8 divise $1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$.

e.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $4^n + 6n - 1$.

f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

8 Récurrence - Partie 2

Montrer par récurrence les formules de sommes suivantes.

g.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

h.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

i.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

j.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

k.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$



Fin de la serie — Exercices Logique Mathématique

Xpert · 1ere Bac Sciences Experimentales · 2026